a) Incógnitas R_A, B_x, B_y (con B_x hacia la izquierda). $\sum F_x$: $\frac{1}{2}R_A - B_x = 0$; $\sum F_y$: $\frac{\sqrt{3}}{2}R_A + B_y - F = 0$; $\sum M_A$: $-lF + 2l\,B_y + l\,B_x = 0$. Sustituyendo, $F = (\sqrt{3} - \frac{1}{2})R_A$, de donde $R_A = 0.812F$, $B_x = 0.406F$, $B_y = 0.297F$ y $R_B = 0.503F$. Isostático.

b) Solo dos incógnitas, R_A y R_B, para tres ecuaciones. $\sum F_y$: $\frac{R_A}{\sqrt{2}} = F$; $\sum F_x$: $\frac{R_A}{\sqrt{2}} = R_B$; $\sum M_A$: $-lF + l\,R_B = 0$. Las tres se cumplen con $R_A = \sqrt{2}\,F$ y $R_B = F$ porque las tres líneas de acción pasan por el punto (l, l). La sujeción es **parcial**: hay equilibrio con esta carga, pero si F se moviera de lugar la ménsula deslizaría.

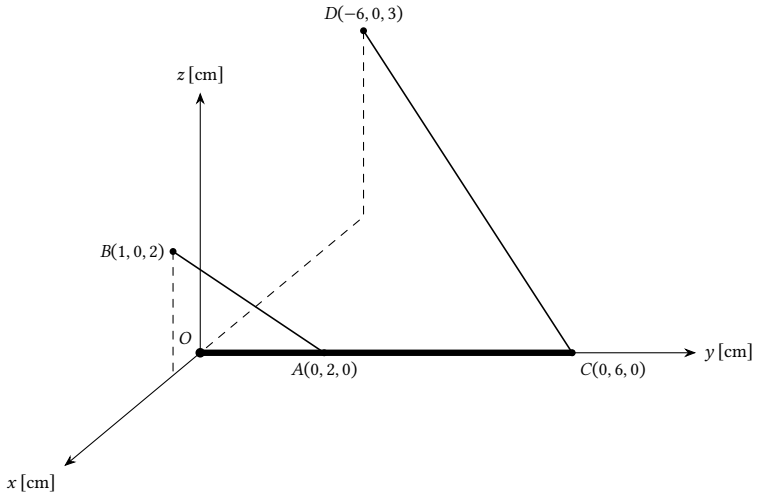
d) Incógnitas A_x, A_y, R_B. $\sum M_A$: $-lF + l\,R_B = 0 \Rightarrow R_B = F$; $A_x = R_B = F$, $A_y = F$, así que $R_A = \sqrt{2}\,F$. Isostático.

Resultado. a) $R_A = 0.812F$, $R_B = 0.503F$. b) $R_A = \sqrt{2}F = 1.414F$, $R_B = F$ (sujeción parcial). d) $R_A = \sqrt{2}F$, $R_B = F$.

Ejercicio 5.5.7 · barra con rótula y dos cables

Adaptado de: 1er final 2014-1 (matutino), problema 4

La barra delgada y homogénea OC, de 130 [N], está sobre el eje y y se apoya en una rótula en O. La sostienen los cables AB y CD, con $A(0, 2, 0)$, $B(1, 0, 2)$, $C(0, 6, 0)$ y $D(-6, 0, 3)$ [cm]. Determine las tensiones en los cables y las componentes de la reacción en O.



Datos. $W = 130$ [N] en el punto medio $G(0, 3, 0)$.

Planteamiento. $\hat{e}_{AB} = \frac{(1,-2,2)}{3}$, $\hat{e}_{CD} = \frac{(-6,-6,3)}{9} = \frac{(-2,-2,1)}{3}$. Momentos respecto a O.

Resolución.

$$\vec{r}_A \times \hat{e}_{AB} = \tfrac{1}{3}(4, 0, -2), \quad \vec{r}_C \times \hat{e}_{CD} = (2, 0, 4), \quad \vec{r}_G \times \vec{W} = (-390, 0, 0).$$

4.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Sección
«coordenadas del centroide», región sombreada	área compuesta (tabla)	4.3.1
figura con semicírculos o cuartos de círculo recortados	partes de área negativa	4.3.1
«determine el valor de a para que $\bar{x}$ sea…»	parámetro desconocido	4.3.2
«rango de valores», «que el centroide quede dentro de…»	desigualdades con $\bar{x}(a)$, $\bar{y}(a)$	4.3.2
«dos densidades», «parte sombreada y no sombreada»	centro de masa ponderado por ρ_i	4.3.3
«barras homogéneas», «determine la densidad»	centro de masa conocido, ρ incógnita	4.3.3
«hoja doblada», «lámina de espesor…», «lb/pie³»	centro de gravedad en 3D	4.3.3
«carga distribuida», w en N/m o lb/ft, «zapata»	fuerza equivalente y su posición	4.3.4

4.3 Procedimientos

Centroide de un área compuesta

1. Copia el sistema de referencia de la figura. No lo cambies: el resultado se pide respecto a él.
2. Descompón la figura en partes simples de la tabla de la sección 4.1. Prefiere sumar una figura «llena» (un rectángulo grande) y restar los huecos.
3. Haz la tabla: parte, A_i (con signo), $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $A_i\bar{x}_i$, $A_i\bar{y}_i$.
4. Suma cada columna y divide: $\bar{x} = \sum A_i\bar{x}_i / \sum A_i$, $\bar{y} = \sum A_i\bar{y}_i / \sum A_i$.
5. Revisa que el punto quede en un lugar razonable (cerca del «grueso» del área y del lado de los ejes de simetría).

Centroide con un parámetro desconocido

1. Haz la tabla de 4.3.1 dejando el parámetro a como literal en A_i y en $\bar{x}_i$.
2. Escribe $\bar{x}(a) = \dfrac{\sum A_i\bar{x}_i}{\sum A_i}$ e iguálala al valor dado: queda una ecuación en a (lineal, cuadrática o cúbica).
3. Descarta las raíces negativas o que no caben en la figura.
4. Con a conocida, calcula la otra coordenada.
5. Si piden un **intervalo**, escribe las desigualdades que expresan la condición (por ejemplo $\bar{x} \le 0$ y $\bar{y} \ge 0$) y verifica también los bordes inclinados de la región.

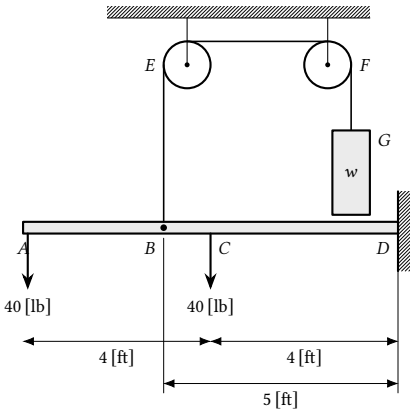
Centro de masa o de gravedad de cuerpos compuestos

1. Identifica cada parte y su densidad ρ_i (o su peso específico γ_i).
2. Calcula $m_i = \rho_i V_i$ (láminas: $V_i = t\,A_i$; barras: $V_i = A_{\text{sección}} L_i$). En láminas de un solo material basta $W_i = \gamma\, t\, A_i$.
3. Para piezas dobladas, ubica cada parte en su plano (xy, yz o xz) y escribe sus tres coordenadas $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$, $\bar{z}_i$; la coordenada perpendicular al plano de la parte es la del plano.
4. Tabla con m_i (o W_i) y sus productos por cada coordenada; divide entre $\sum m_i$.
5. Si la incógnita es una densidad, despéjala de la ecuación de la coordenada que la contenga.

Ejercicio 5.5.4 · viga empotrada con cable y contrapeso

Adaptado de: 1er final 2016-2 (matutino), problema 3

La viga AD, de peso despreciable, está empotrada en D. En A y en C cuelgan cargas de 40 [lb]. Un cable unido en B sube, pasa por las poleas lisas E y F y sostiene un contrapeso G de $w = 100$ [lb]. Desprecie el peso de las poleas y sus soportes. Determine las reacciones en el empotramiento y diga si el sistema está en equilibrio.



Datos. Origen en D: A en $x = -8$, B en $x = -5$, C en $x = -4$ [ft].

Planteamiento. Contrapeso: $\sum F_y = T - w = 0 \Rightarrow T = 100$ [lb] (poleas lisas: la tensión es la misma en todo el cable). Viga: cargas de 40 [lb] en A y C, T hacia arriba en B, y en el empotramiento D_x, D_y, M_D. Tres incógnitas: isostático, siempre hay equilibrio.

Resolución. $\sum F_x$: $D_x = 0$. $\sum F_y$: $D_y + 100 - 40 - 40 = 0 \Rightarrow D_y = -20$ [lb].

$$\sum M_D = (-8)(-40) + (-4)(-40) + (-5)(100) + M_D = -20 + M_D = 0 \;\Rightarrow\; M_D = 20\,[\text{lb}\cdot\text{ft}].$$

Resultado. $T = 100$ [lb]; $D_x = 0$, $D_y = 20$ [lb] hacia abajo y $M_D = 20$ [lb · ft] antihorario. El sistema sí está en equilibrio: el empotramiento absorbe la diferencia. **Observación:** si D fuera solo una articulación, el equilibrio exigiría $5T = 480$, es decir, un contrapeso de 96 [lb], y con 100 [lb] la viga giraría.

Ejercicio 5.5.5 · dos barras articuladas

Adaptado de: 1er final 2015-1 (matutino), problema 4

Dos barras de peso despreciable están articuladas entre sí en B y a apoyos fijos en A y C. La barra AB mide 3 [m] y forma 60° con la horizontal; la barra BC es horizontal, de 4 [m], y en su punto medio actúa una fuerza vertical de 2000 [N] hacia abajo. Determine las magnitudes de las reacciones en las articulaciones A, B y C.

$$\bar{x} = \frac{108\,792}{5599.23} = 19.43\,[\text{cm}], \qquad \bar{y} = \frac{208\,223}{5599.23} = 37.19\,[\text{cm}].$$

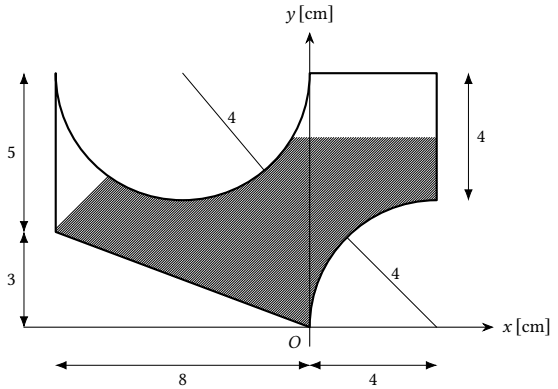
Resultado. $C(19.43,\ 37.19)$ [cm], respecto a los ejes de la figura.

4.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 4.5.1 · placa con recortes circulares y triangular

Adaptado de: 1er final 2014-1 (matutino), problema 3

Determine las coordenadas del centroide de la región sombreada respecto al sistema de referencia indicado. La región está dentro del rectángulo $-8 \le x \le 4$, $0 \le y \le 8$ (en cm) y le faltan: un semicírculo de radio 4 con el diámetro en el borde superior, de $x = -8$ a $x = 0$; un cuarto de círculo de radio 4 con centro en la esquina $(4, 0)$; y el triángulo de vértices $(-8, 0)$, $(0, 0)$ y $(-8, 3)$.

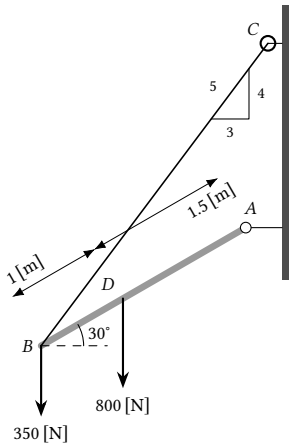


Datos. Rectángulo 12×8 [cm]; $r = 4$ [cm] en ambos recortes; triángulo de catetos 8 y 3.

Planteamiento. Rectángulo lleno menos tres huecos. Semicírculo: centro $(-4, 8)$, su centroide queda **debajo** del diámetro, en $\bar{y} = 8 - \frac{4(4)}{3\pi} = 6.30$. Cuarto de círculo: centro $(4, 0)$, centroide en $(4 - 1.70,\ 1.70)$. Triángulo rectángulo con el ángulo recto en $(-8, 0)$: centroide a un tercio de cada cateto, $\left(-8 + \frac{8}{3},\ 1\right)$.

Resolución.

Parte	A_i [cm^2]	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$A_i\bar{x}_i$	$A_i\bar{y}_i$
Rectángulo	96	−2	4	−192	384
Semicírculo	−25.13	−4	6.30	100.53	−158.40
Triángulo	−12	−5.33	1	64.00	−12.00
Cuarto de círculo	−12.57	2.30	1.70	−28.93	−21.33
$\sum$	46.30			−56.40	192.27



Datos. $AB = 2.5\,[\mathrm{m}]$. Con origen en B: $D(0.866, 0.5)$, $A(2.165, 1.25)\,[\mathrm{m}]$. Dirección del cable: $\hat{e}_{BC} = (0.6, 0.8)$.

Planteamiento. DCL del aguilón: T en B, cargas en B y D, A_x y A_y. Momentos respecto a A.

Resolución. Posiciones relativas a A: $\vec{r}_{B/A} = (-2.165, -1.25)$, $\vec{r}_{D/A} = (-1.299, -0.75)$.

$$\sum M_A = (-2.165)(0.8T - 350) - (-1.25)(0.6T) + (-1.299)(-800) = -0.982\,T + 1796.95 = 0$$

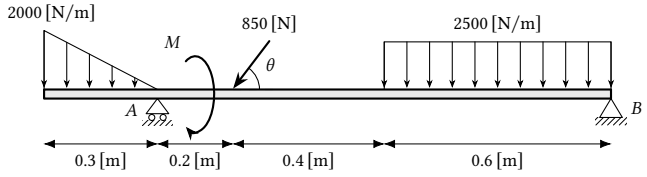
de donde $T = 1830\,[\mathrm{N}]$. Luego $\sum F_x = A_x + 0.6(1830) = 0 \Rightarrow A_x = -1098\,[\mathrm{N}]$ y $\sum F_y = A_y + 0.8(1830) - 350 - 800 = 0 \Rightarrow A_y = -314\,[\mathrm{N}]$.

Resultado. a) $A_x = 1098\,[\mathrm{N}]$ hacia la izquierda, $A_y = 314\,[\mathrm{N}]$ hacia abajo. b) $T_{CB} = 1830\,[\mathrm{N}]$.

Ejercicio 5.5.2 · viga con carga triangular, uniforme, fuerza inclinada y par

Adaptado de: 1er final 2013-2 (matutino), problema 4

La viga de la figura, de peso despreciable, tiene un apoyo libre en A y una articulación en B. Sobre ella actúan una carga triangular de $2000\,[\mathrm{N/m}]$ a 0, una fuerza de $850\,[\mathrm{N}]$ inclinada ($\cos\theta = \frac{3}{5}$), una carga uniforme de $2500\,[\mathrm{N/m}]$ y un par M de $1200\,[\mathrm{N \cdot m}]$ en sentido horario. Determine las magnitudes de las reacciones en A y en B.



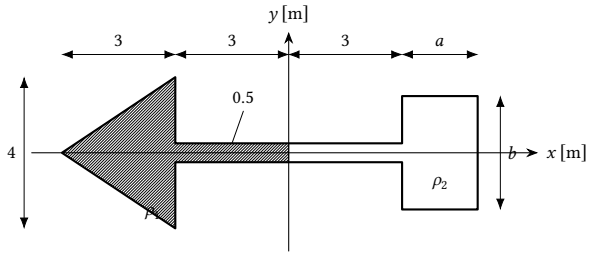
3. Con $a = 4$: áreas 12, 16 y 6 ($\sum = 34$); $\bar{y}_i = 1$, 6 y 8.67; $\sum A_i \bar{y}_i = 12 + 96 + 52 = 160$.
4. $\bar{y} = \frac{160}{34} = 4.71\,[\mathrm{ft}]$.

Resultado. $a = 4\,[\mathrm{ft}]$; $\bar{y} = 4.71\,[\mathrm{ft}]$.

Ejercicio 4.5.3 · figura con dos densidades

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 3

La figura compuesta tiene espesor constante de $1\,[\mathrm{m}]$. La parte sombreada (un triángulo de base 4 y altura 3, con el vértice en $x = -6$, y la mitad izquierda del vástago de 3×0.5) tiene densidad $\rho_1 = 40\,[\mathrm{kg/m^3}]$; la parte no sombreada (la mitad derecha del vástago, de 3×0.5, y un rectángulo de ancho a y altura b, centrado en el eje x, que empieza en $x = 3$) tiene $\rho_2 = 100\,[\mathrm{kg/m^3}]$. Si $b = 1.5a$, determine a y b para que el centro de masa tenga $\bar{x} = 1.5\,[\mathrm{m}]$.



Datos. $\rho_1 = 40$, $\rho_2 = 100\,[\mathrm{kg/m^3}]$; $t = 1\,[\mathrm{m}]$; $b = 1.5a$; $\bar{x} = 1.5\,[\mathrm{m}]$.

Planteamiento. $m_i = \rho_i\, t\, A_i$. La figura es simétrica respecto al eje x, así que $\bar{y} = 0$ y solo interesa $\bar{x} = \sum m_i \bar{x}_i / \sum m_i$. El triángulo tiene su base vertical en $x = -3$: su centroide está a un tercio de la base, en $x = -4$.

Resolución.

Parte	$V_i\,[\mathrm{m^3}]$	$m_i\,[\mathrm{kg}]$	$\bar{x}_i\,[\mathrm{m}]$	$m_i \bar{x}_i$
Triángulo (ρ_1)	6	240	-4	-960
Vástago izquierdo (ρ_1)	1.5	60	-1.5	-90
Vástago derecho (ρ_2)	1.5	150	1.5	225
Rectángulo (ρ_2)	$1.5a^2$	$150a^2$	$3 + \frac{a}{2}$	$450a^2 + 75a^3$

$$\frac{75a^3 + 450a^2 - 825}{150a^2 + 450} = 1.5 \;\Rightarrow\; 75a^3 + 225a^2 - 1500 = 0 \;\Rightarrow\; a^3 + 3a^2 - 20 = 0.$$

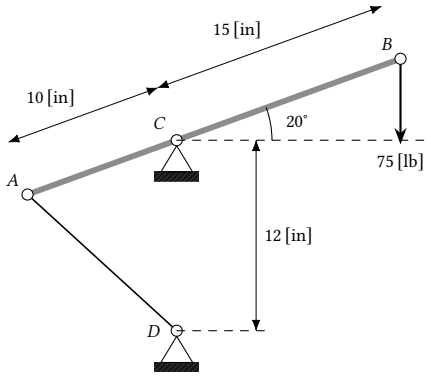
$a = 2$ cumple ($8 + 12 - 20 = 0$); el factor restante $a^2 + 5a + 10$ no tiene raíces reales.

Resultado. $a = 2\,[\mathrm{m}]$, $b = 3\,[\mathrm{m}]$.

Ejercicio 4.5.4 · densidad de una barra a partir del centro de masa

Adaptado de: 1er final 2014-2 (matutino), problema 4

Una pieza simétrica respecto al plano xy está formada por dos barras homogéneas del mismo espesor ($8\,[\mathrm{cm}]$ en z). La barra vertical (1) mide $8\,[\mathrm{cm}]$ de ancho y $24\,[\mathrm{cm}]$ de alto,



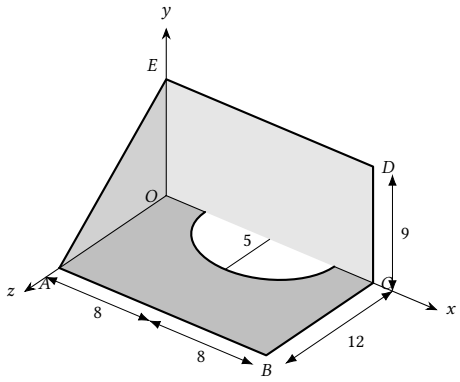
Datos. Origen en C: $A(-10\cos 20^\circ, -10\sin 20^\circ) = (-9.397, -3.420)\,[\text{in}]$, $B(15\cos 20^\circ, 15\sin 20^\circ) = (14.095, 5.130)\,[\text{in}]$, $D(0, -12)\,[\text{in}]$.
Planteamiento. DCL de la palanca: T en A dirigida hacia D; C_x, C_y en la articulación; 75 [lb] en B. Tres incógnitas, tres ecuaciones. Momentos respecto a C.
Resolución. $\overrightarrow{AD} = (9.397, -8.580)$, $|AD| = 12.725\,[\text{in}]$, así que $\hat{e}_{AD} = (0.7385, -0.6743)$.

$$\sum M_C = (-9.397)(-0.6743\,T) - (-3.420)(0.7385\,T) + (14.095)(-75) = 0,$$

es decir, $8.861\,T = 1057.2$, de donde $T = 119.3\,[\text{lb}]$. $\sum F_x = 0$: $C_x + 0.7385(119.3) = 0 \Rightarrow C_x = -88.1\,[\text{lb}]$. $\sum F_y = 0$: $C_y - 0.6743(119.3) - 75 = 0 \Rightarrow C_y = 155.4\,[\text{lb}]$.
Resultado. a) $T = 119.3\,[\text{lb}]$. b) $\vec{C} = -88.1\,\hat{\imath} + 155.4\,\hat{\jmath}\,[\text{lb}]$; $|\vec{C}| = 178.7\,[\text{lb}]$, a 119.5° del eje x positivo.

Ejemplo resuelto · letrero con rótula y dos cables

Basado en: 1er final 2018-1 (vespertino), problema 4.
Un letrero rectangular homogéneo de 120 [lb], de 4 [ft] por 3 [ft], está en el plano yz, colgado del borde OB (sobre el eje y). Se sostiene con una rótula en O y con los cables AD y BC: $A(0, 2, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(3, 0, 0)$, $D(-3, 0, 2)\,[\text{ft}]$. Determine las tensiones y la reacción en la rótula.



Datos. $\gamma = 540\,[\text{lb/ft}^3] = \frac{540}{1728} = 0.3125\,[\text{lb/in}^3]$; $t = 0.2\,[\text{in}]$, así que $\gamma t = 0.0625\,[\text{lb/in}^2]$.
Planteamiento. $W_i = \gamma\, t\, A_i$. Cada parte tiene la coordenada de su plano igual a cero: la base $y = 0$, la pared $OCDE$ $z = 0$ y la pared OEA $x = 0$. El semicírculo recortado tiene su centroide a $\frac{4(5)}{3\pi} = 2.12\,[\text{in}]$ del borde OC, hacia $+z$.
Resolución.

Parte	A_i	$W_i\,[\text{lb}]$	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$\bar{z}_i$	$W_i\bar{x}_i$	$W_i\bar{z}_i$
OEA	54	3.375	0	3	4	0	13.50
$OCDE$	144	9.000	8	4.5	0	72.00	0
$OABC$	192	12.000	8	0	6	96.00	72.00
Semicírculo	−39.27	−2.454	8	0	2.12	−19.63	−5.21
$\sum$		21.921				148.37	80.29

Además $\sum W_i\bar{y}_i = 3.375(3) + 9(4.5) = 50.63\,[\text{lb}\cdot\text{in}]$. Entonces

$$\bar{x} = \frac{148.37}{21.921} = 6.77, \qquad \bar{y} = \frac{50.63}{21.921} = 2.31, \qquad \bar{z} = \frac{80.29}{21.921} = 3.66\,[\text{in}].$$

Resultado. $G(6.77,\ 2.31,\ 3.66)\,[\text{in}]$; la pieza pesa 21.92 [lb].

Ejercicio 4.5.6 · resultante de la reacción bajo una zapata

Adaptado de: 2º final 2011-2, problema 3

La reacción del suelo en la base de una zapata se aproxima con la carga distribuida de la figura (hacia arriba): crece linealmente de 300 a 400 [lb/ft] en los primeros 1.5 [ft], se mantiene en 400 [lb/ft] los siguientes 1.5 [ft] y disminuye linealmente hasta cero en los últimos 3 [ft]. Determine: a) la magnitud de la fuerza resultante sobre la zapata; b) la ubicación de dicha resultante.

- $n = e$ y los apoyos están bien dispuestos: **isostático**; las reacciones salen de las ecuaciones de equilibrio. Es lo que pide el programa.
- $n > e$: **hiperestático**; las ecuaciones de la estática no bastan (hace falta la deformación). En el examen solo se pide reconocerlo.
- $n < e$, o apoyos con reacciones todas paralelas o todas concurrentes en un punto: **sujeción parcial o impropia**; el cuerpo solo queda en equilibrio para ciertas cargas. Si las ecuaciones resultan incompatibles, no hay equilibrio.

Algunos ejercicios dan una **condición extra** («la reacción en A es la mitad de la vertical en B») y piden una carga o una distancia desconocida: es una ecuación más para una incógnita más.

5.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se trata de…	Sección
«viga», «apoyo libre», «articulación», cargas en N/m	reacciones en el plano con carga distribuida	5.3.2
«determine M (o d) para que la reacción en A sea…»	condición extra: una ecuación más	5.3.3
«empotrado», «voladizo», «ménsula empotrada»	empotramiento: R_x, R_y y par M	5.3.2
«palanca», «aguilón», «pescante», «cable de control»	cuerpo con articulación y cable	5.3.2
«dos barras articuladas», «marco», «armadura»	barras de dos fuerzas y estructura como cuerpo rígido	5.3.4
«rótula», «cables», coordenadas de puntos	reacciones en el espacio	5.3.5
«placa (o viga en L) sostenida por cables verticales»	fuerzas paralelas en el espacio	5.3.5
«para cada tipo de apoyo», «¿está en equilibrio?»	clasificar la sujeción	5.3.6

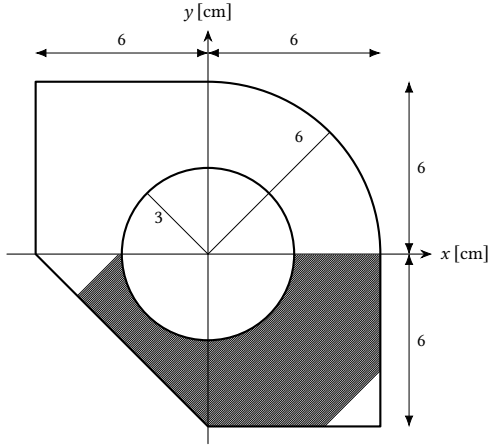
5.3 Procedimientos

Diagrama de cuerpo libre

1. Aísla el cuerpo (o el sistema que te convenga) y dibuja su contorno con los ejes.
2. Reduce cada carga distribuida a su fuerza equivalente y anota dónde actúa.
3. Pon el peso en el centro de gravedad (si no es despreciable).
4. Sustituye cada apoyo por sus reacciones (tabla de la sección 5.1.3). En una barra de dos fuerzas, una sola fuerza a lo largo de la barra.
5. Cuenta las incógnitas y compáralas con 3 (plano) o 6 (espacio).

Reacciones en el plano

1. DCL (5.3.1). Si hay cables o fuerzas inclinadas, escribe sus componentes con el triángulo de pendiente $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ o con senos y cosenos.
2. Toma momentos respecto al punto por donde pasan **más incógnitas** (una articulación o un empotramiento): sale una ecuación con una sola incógnita.
3. Con $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ obtén las demás.
4. En un empotramiento, la ecuación de momentos da directamente el par de empotramiento M_A.



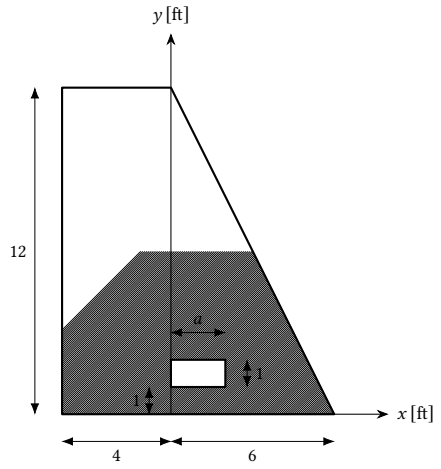
Resultado: $\bar{x} = \bar{y} = 0.40\,[\mathrm{cm}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

Ejercicio propuesto 4.6.2 · placa trapecial con hueco rectangular

Adaptado de: 1er final 2013-1 (vespertino), problema 3

La región sombreada (cotas en pies) es un rectángulo de 4×12 a la izquierda del eje y unido a un triángulo rectángulo de catetos 6 (sobre el eje x) y 12 (sobre el eje y). Tiene un hueco rectangular de ancho a y altura 1 que empieza en el eje y, entre $y = 1$ y $y = 2$. Determine a para que $\bar{x} = -\frac{26}{82}\,[\mathrm{ft}]$ y, con ese valor, obtenga $\bar{y}$.



Unidad 5 · Estudio del equilibrio de los cuerpos: reacciones en el plano y en el espacio

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno resolverá ejercicios de equilibrio isostático para cuerpos rígidos, sistemas mecánicos y estructuras de uso frecuente en ingeniería.

Instrucciones de emergencia

- **Frecuencia:** aparece en 24 de los 25 exámenes finales de 2006-2 a 2018-2 (las versiones del mismo día cuentan como un examen) y en los 13 aplicados desde 2014-1. Es la unidad que más sale. Suele ser el problema 4, muchas veces con una carga distribuida (Unidad 4).
- **Tiempo:** de 4 a 5 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 5.1 con la tabla de apoyos a la vista (20 min).
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 5.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve con cronómetro los ejercicios 5.5.2 (viga), 5.5.5 (barras articuladas) y 5.5.7 (rótula y cables), 20 min cada uno.

5.1 Conceptos y expresiones

Condiciones de equilibrio

Un cuerpo rígido está en equilibrio cuando el sistema de todas las fuerzas que actúan sobre él es equivalente a cero, es decir, cuando la resultante y el momento resultante respecto a cualquier punto son nulos:

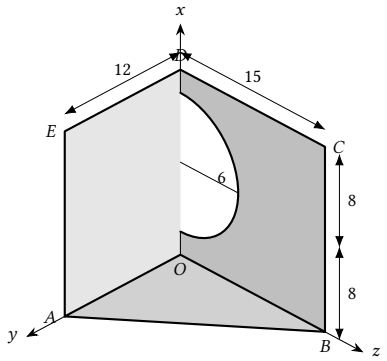
$$\sum \vec{F} = \vec{0}, \qquad \sum \vec{M}_P = \vec{0} \quad \text{(para cualquier punto } P\text{)}.$$

- **En el plano** (xy) quedan tres ecuaciones escalares independientes: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_P = 0$. Con ellas se calculan, como máximo, **tres** incógnitas.
- **En el espacio** quedan seis: $\sum F_x = \sum F_y = \sum F_z = 0$ y $\sum M_x = \sum M_y = \sum M_z = 0$. Como máximo, **seis** incógnitas.
- El momento de cada fuerza se calcula con $\vec{M}_P = \vec{r} \times \vec{F}$ (Unidad 3). En el plano basta $M_P = xF_y - yF_x$, con (x, y) medidos desde P; el signo positivo es el antihorario.
- Un **par** de momento $\vec{M}$ se suma tal cual en la ecuación de momentos y no aparece en las de fuerzas.
- Una **carga distribuida** se sustituye por su fuerza equivalente: magnitud igual al área del diagrama de carga, aplicada en el centroide de esa área (Unidad 4). La sustitución vale para calcular reacciones, no para calcular esfuerzos internos.

Diagrama de cuerpo libre

El diagrama de cuerpo libre (DCL) es el dibujo del cuerpo *aislado*: se quitan los apoyos y en su lugar se dibujan las fuerzas y pares que ejercen sobre el cuerpo. Lleva:

1. el contorno del cuerpo y el sistema de referencia;



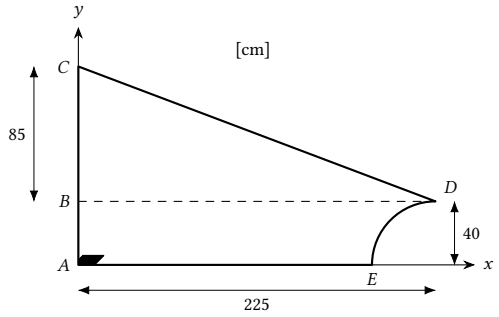
Resultado: $G(6.45,\ 3.25,\ 4.52)\,[\text{in}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 110.

Ejercicio propuesto 4.6.5 · placa con recorte de cuarto de círculo

Adaptado de: 1er final 2016-2 (vespertino), problema 2

La placa de la figura (cotas en cm) tiene vértices $A(0,0)$, $C(0,125)$ y $D(225,40)$; $B(0,40)$ está sobre el lado AC. Su borde inferior va de A a $E(185,0)$ y de E a D sigue un cuarto de circunferencia de radio 40 con centro en $(225,0)$. Determine las coordenadas del centroide.



Resultado: $C(84.84,\ 46.93)\,[\text{cm}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 111.

Ejercicio propuesto 4.6.6 · fuerza equivalente de una carga parabólica

Adaptado de: 1er final 2011-1 (versión B), problema 4

Una viga de 20 [m] soporta una carga distribuida hacia abajo que sigue la ley $w = x^2$ (w en N/m, x en metros, desde el apoyo izquierdo). Determine la magnitud de la fuerza equivalente y la abscisa de su línea de acción. (En el examen, la viga tiene además peso, una fuerza y un par, y se piden las reacciones: ese paso es el de la Unidad 5.)

Fuerza equivalente de una carga distribuida

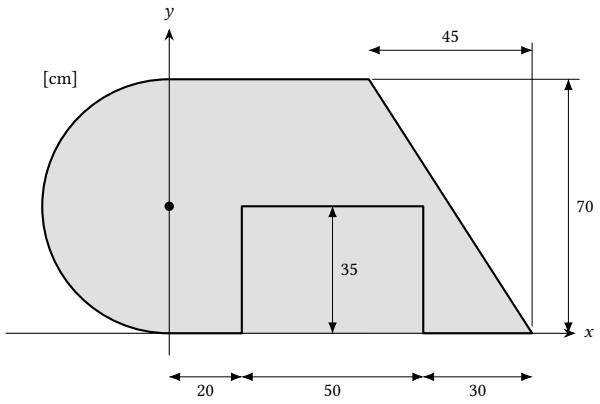
1. Descompón el diagrama de carga en rectángulos, triángulos o una ley $w(x)$.
2. Para cada parte: F_i = área y $\bar{x}_i$ = abscisa de su centroide.
3. Fuerza equivalente: $F = \sum F_i$; posición: $\bar{x} = \sum F_i \bar{x}_i / F$.
4. Dibuja la fuerza en el diagrama de cuerpo libre con su sentido (hacia abajo si es peso; hacia arriba si es la reacción del suelo) y sigue con las ecuaciones de equilibrio (Unidad 5).

4.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · centroide de una placa con semicírculo, triángulo y hueco

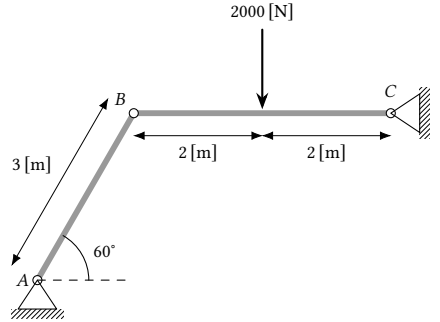
Basado en: 1er final 2018-1 (matutino), problema 3.

Determine las coordenadas del centroide del área de la figura. El eje y pasa por el borde recto de un semicírculo de radio 35 [cm], cuyo centro está a 35 [cm] sobre el eje x. A la derecha del semicírculo hay un rectángulo de 55×70 [cm] y después un triángulo de base 45 [cm] y altura 70 [cm]. Se recorta un hueco rectangular de 50×35 [cm] apoyado en el eje x, que empieza a 20 [cm] del eje y.



Datos. $r = 35$ [cm]; rectángulo 55×70; triángulo 45×70; hueco 50×35 desde $x = 20$.
Planteamiento. Cuatro partes: semicírculo, rectángulo y triángulo (positivas) y el hueco (negativo). El centroide del semicírculo está a $4r/3\pi = 14.85$ [cm] a la **izquierda** del eje y, y el del triángulo a un tercio de su base desde el lado vertical.
Resolución.

Parte	A_i [cm^2]	$\bar{x}_i$ [cm]	$\bar{y}_i$ [cm]	$A_i\bar{x}_i$	$A_i\bar{y}_i$
Semicírculo	1924.23	−14.85	35	−28 583	67 348
Rectángulo	3850	27.5	35	105 875	134 750
Triángulo	1575	70	23.33	110 250	36 750
Hueco	−1750	45	17.5	−78 750	−30 625
$\sum$	5599.23			108 792	208 223

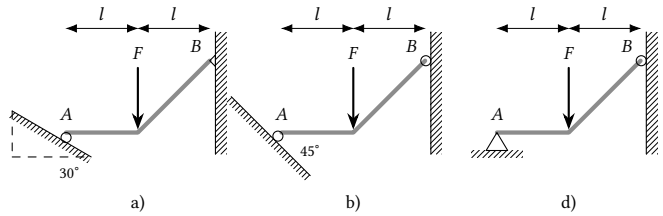


Planteamiento. AB no tiene cargas entre sus extremos: es una **barra de dos fuerzas** y la fuerza que ejerce sobre BC en B va a lo largo de AB, $\vec{F}_B = F_{AB}(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ)$. DCL de BC: $\vec{F}_B$, 2000 [N] a 2 [m] de B, C_x y C_y. Tres incógnitas.
Resolución. Momentos respecto a C (a 4 [m] de B): $\sum M_C = -4\,F_{AB}\sin 60^\circ + 2(2000) = 0 \Rightarrow F_{AB}\sin 60^\circ = 1000$ [N], así que $F_{AB} = \frac{1000}{0.8660} = 1154.7$ [N] y $F_{AB}\cos 60^\circ = 577.4$ [N]. $\sum F_x$: $577.4 + C_x = 0 \Rightarrow C_x = -577.4$ [N]. $\sum F_y$: $1000 - 2000 + C_y = 0 \Rightarrow C_y = 1000$ [N].
Resultado. $A = B = 1154.7$ [N] (la barra AB trabaja a compresión); $\vec{C} = -577.4\,\hat{\imath} + 1000\,\hat{\jmath}$ [N], $C = 1154.7$ [N].

Ejercicio 5.5.6 · la misma ménsula con distintos apoyos

Adaptado de: 2º final 2014-1, problema 4

Una ménsula de peso despreciable va de A a un codo a la distancia l (tramo horizontal) y de ahí a B, que está l más a la derecha y l más arriba, junto a un muro vertical. En el codo actúa una fuerza vertical F. Para cada caso, determine las reacciones en función de F: a) articulación en B y apoyo deslizante en A sobre un plano inclinado 30°; b) apoyos deslizantes en A (sobre un plano inclinado 45°) y en B (contra el muro); d) articulación en A y apoyo deslizante en B contra el muro.



Planteamiento. Origen en A; codo en $(l, 0)$ y B en $(2l, l)$. Un apoyo deslizante da una fuerza perpendicular a su superficie: contra el muro, horizontal hacia la izquierda; sobre el plano de 30°, a 60° de la horizontal, $R_A(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; sobre el de 45°, $R_A(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
Resolución.

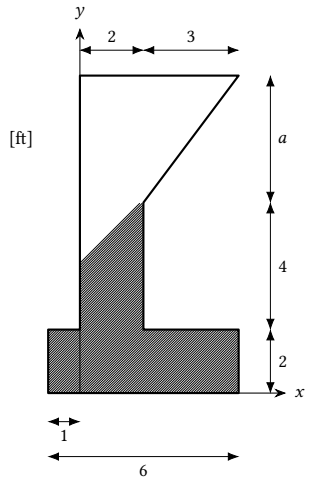
$$\bar{x} = \frac{-56.40}{46.30} = -1.22\,[\text{cm}], \qquad \bar{y} = \frac{192.27}{46.30} = 4.15\,[\text{cm}].$$

Resultado. $C(-1.22,\ 4.15)\,[\text{cm}]$.

Ejercicio 4.5.2 · dimensión para una abscisa del centroide dada

Adaptado de: 1er final 2013-1 (matutino), problema 3

La región plana de la figura (cotas en pies) está formada por una base de 6×2, que sobresale 1 pie a la izquierda del eje y; un poste de ancho 2 apoyado en el eje y, de altura $4 + a$ sobre la base; y un triángulo rectángulo adosado a la parte alta del poste, de catetos 3 (horizontal, en el borde superior) y a (vertical, contra el poste). Determine el valor de a para que $\bar{x} = \frac{29}{17}$ [ft] y, con ese valor, obtenga $\bar{y}$.



Datos. $\bar{x} = 29/17\,[\text{ft}]$; dimensiones de la figura.

Planteamiento. Tres partes positivas; a aparece en el área del poste y en la del triángulo. El triángulo tiene el ángulo recto en $(2,\ 6 + a)$: su centroide está en $\bar{x} = 2 + \frac{3}{3} = 3$ y $\bar{y} = 6 + a - \frac{a}{3}$.

Resolución.

Parte	$A_i\,[\text{ft}^2]$	$\bar{x}_i$	$\bar{y}_i$	$A_i\bar{x}_i$
Base	12	2	1	24
Poste	$2(4+a)$	1	$2 + \frac{4+a}{2}$	$2(4+a)$
Triángulo	$\frac{3a}{2}$	3	$6 + \frac{2a}{3}$	$\frac{9a}{2}$

1. $\sum A_i = 20 + \frac{7a}{2}$ y $\sum A_i\bar{x}_i = 32 + \frac{13a}{2}$.
2. $\dfrac{32 + 6.5a}{20 + 3.5a} = \dfrac{29}{17} \;\Rightarrow\; 544 + 110.5a = 580 + 101.5a \;\Rightarrow\; a = 4\,[\text{ft}]$.

Datos. Origen en el extremo izquierdo: A en $x = 0.3$, fuerza de 850 [N] en $x = 0.5$, carga uniforme de $x = 0.9$ a 1.5, B en $x = 1.5$ [m].

Planteamiento. Cargas equivalentes: triángulo $\frac{1}{2}(2000)(0.3) = 300$ [N] en $x = 0.1$ (a 0.2 [m] a la izquierda de A); rectángulo $2500(0.6) = 1500$ [N] en $x = 1.2$. Componentes de la fuerza: $850(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) = (-510, -680)$ [N]. Incógnitas: A (vertical), B_x, B_y.

Resolución. Momentos respecto a A (antihorario positivo):

$$\sum M_A = (0.2)(300) - (0.2)(680) - (0.9)(1500) - 1200 + 1.2\,B_y = 0,$$

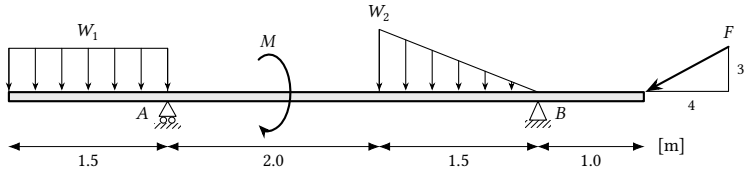
de donde $B_y = \frac{2626}{1.2} = 2188.3$ [N]. $\sum F_x$: $B_x - 510 = 0 \Rightarrow B_x = 510$ [N]. $\sum F_y$: $A - 300 - 680 - 1500 + B_y = 0 \Rightarrow A = 291.7$ [N].

Resultado. $A = 291.7$ [N] (hacia arriba); $\vec{B} = 510\,\hat{\imath} + 2188.3\,\hat{\jmath}$ [N], $|\vec{B}| = 2247.0$ [N].

Ejercicio 5.5.3 · momento del par para una condición entre reacciones

Adaptado de: 2º final 2012-2, problema 4

La viga de la figura (acotaciones en metros), de peso despreciable, tiene un apoyo libre en A y una articulación en B. Las cargas son $W_1 = 200$ [N/m] (uniforme), $W_2 = 600$ [N/m] (triangular, que baja a cero en B), $F = 500$ [N] con pendiente 3 : 4 y un par de momento M. La reacción en A es la mitad de la componente vertical de la reacción en B. Determine el momento M.



Datos. Origen en el extremo izquierdo: A en $x = 1.5$, W_2 de 3.5 a 5, B en 5, F en 6 [m]. $\vec{F} = 500(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) = (-400, -300)$ [N].

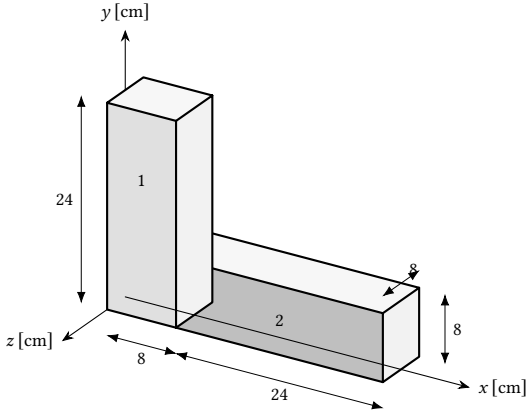
Planteamiento. Cargas equivalentes: $200(1.5) = 300$ [N] en $x = 0.75$; $\frac{1}{2}(600)(1.5) = 450$ [N] en $x = 3.5 + \frac{1.5}{3} = 4.0$. Incógnitas: A, B_x, B_y y M; la condición $A = \frac{1}{2}B_y$ completa cuatro ecuaciones.

Resolución. $\sum F_x$: $B_x - 400 = 0 \Rightarrow B_x = 400$ [N]. $\sum F_y$: $A + B_y - 300 - 450 - 300 = 0$ y $A = \frac{1}{2}B_y$, así que $B_y = 700$ [N] y $A = 350$ [N]. Momentos respecto a B (antihorario positivo; M supuesto antihorario):

$$\sum M_B = (-4.25)(-300) + (-3.5)(350) + (-1)(-450) + (1)(-300) + M = 200 + M = 0.$$

Resultado. $M = -200$ [N · m]: 200 [N · m] en sentido **horario** ($\vec{M} = -200\,\hat{k}$ [N · m]); $A = 350$ [N], $B_x = 400$ [N], $B_y = 700$ [N].

con un lado sobre el eje y; la barra horizontal (2) mide 24 [cm] de largo y 8 [cm] de alto, y va de $x = 8$ a $x = 32$ [cm] sobre el eje x. La barra (1) tiene densidad 14 000 [kg/m^3] y el centro de masa de la pieza está en (10, 9, 0) [cm]. Determine la densidad de la barra (2).



Datos. $\rho_1 = 14\,000\,[\text{kg/m}^3]$; $G(10, 9, 0)$ [cm]; $V_1 = V_2 = 8 \cdot 24 \cdot 8 = 1536\,[\text{cm}^3]$.

Planteamiento. Centroides: barra 1 en (4, 12), barra 2 en (20, 4). Como los volúmenes son iguales, $m_2/m_1 = \rho_2/\rho_1$. Cualquiera de las dos coordenadas sirve.

Resolución.

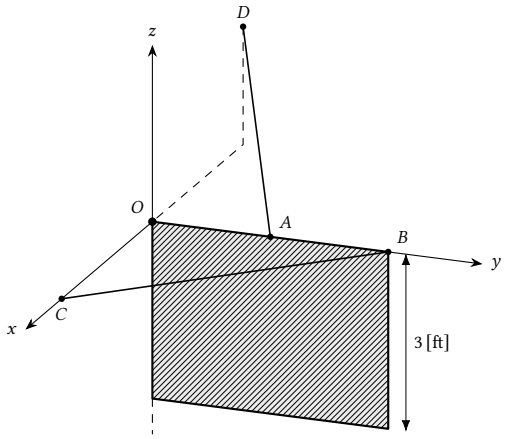
1. Con $\bar{y}$: $\dfrac{12m_1 + 4m_2}{m_1 + m_2} = 9 \;\Rightarrow\; 3m_1 = 5m_2 \;\Rightarrow\; \dfrac{m_2}{m_1} = 0.6$.
2. Comprobación con $\bar{x}$: $\dfrac{4 + 20(0.6)}{1 + 0.6} = \dfrac{16}{1.6} = 10\,[\text{cm}]$. Coincide.
3. $\rho_2 = 0.6\,\rho_1 = 0.6(14\,000)$.

Resultado. $\rho_2 = 8400\,[\text{kg/m}^3]$.

Ejercicio 4.5.5 · centro de gravedad de una lámina doblada

Adaptado de: 1er final 2013-2 (matutino), problema 3

Una hoja de acero homogénea de 0.2 [in] de espesor y peso específico 540 [lb/ft^3] se cortó y dobló para formar la pieza de la figura (cotas en pulgadas): una base $OABC$ en el plano xz, de 16 (en x) por 12 (en z), a la que se le recortó un semicírculo de radio 5 con centro en $(8, 0, 0)$ sobre el borde OC; una pared rectangular $OCDE$ en el plano xy, de 16×9; y una pared triangular OEA en el plano yz, con $E(0, 9, 0)$ y $A(0, 0, 12)$. Determine las coordenadas del centro de gravedad de la pieza.



Datos. $W = 120$ [lb] en el centro del letrero, $G(0, 2, -1.5)$ [ft].
Planteamiento. Cinco incógnitas (T_{AD}, T_{BC}, O_x, O_y, O_z). Con momentos respecto a O desaparece la rótula.
Resolución. $\hat{e}_{AD} = \frac{(-3,-2,2)}{\sqrt{17}}$, $\hat{e}_{BC} = \frac{(3,-4,0)}{5}$.

$$\vec{r}_A \times \hat{e}_{AD} = \frac{(4, 0, 6)}{\sqrt{17}}, \qquad \vec{r}_B \times \hat{e}_{BC} = \left(0, 0, -\tfrac{12}{5}\right),$$

$$\vec{r}_G \times \vec{W} = (0, 2, -1.5) \times (0, 0, -120) = (-240, 0, 0).$$

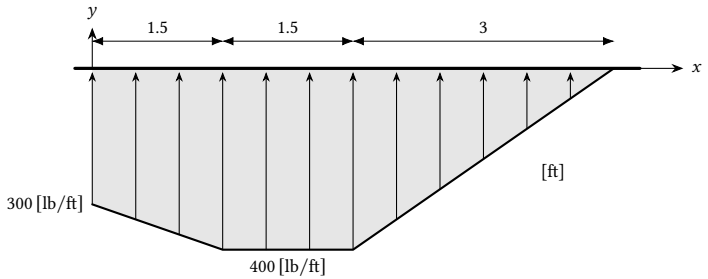
$\sum M_x = 0$: $\frac{4}{\sqrt{17}} T_{AD} - 240 = 0 \Rightarrow T_{AD} = 60\sqrt{17} = 247.4\,[\text{lb}]$.
$\sum M_z = 0$: $\frac{6}{\sqrt{17}} T_{AD} - \frac{12}{5} T_{BC} = 0 \Rightarrow T_{BC} = 150\,[\text{lb}]$.
$\sum \vec{F} = \vec{0}$: $O_x = \frac{3}{\sqrt{17}} T_{AD} - \frac{3}{5} T_{BC} = 180 - 90 = 90$; $O_y = \frac{2}{\sqrt{17}} T_{AD} + \frac{4}{5} T_{BC} = 120 + 120 = 240$; $O_z = 120 - \frac{2}{\sqrt{17}} T_{AD} = 0$.
Resultado. $T_{AD} = 247.4\,[\text{lb}]$, $T_{BC} = 150\,[\text{lb}]$, $\vec{O} = 90\,\hat{\imath} + 240\,\hat{\jmath}\,[\text{lb}]$ ($|\vec{O}| = 256.3\,[\text{lb}]$).

5.5 Ejercicios de examen resueltos

Ejercicio 5.5.1 · aguilón con dos cargas

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 4

El aguilón AB, de peso despreciable, está articulado en A a un muro y forma 30° con la horizontal. El cable CB tiene pendiente 4 : 3. En B cuelga una carga de 350 [N] y en D (a 1 [m] de B; $DA = 1.5$ [m]) una de 800 [N]. Ignore el tamaño de los collarines. Determine: a) las componentes horizontal y vertical de la fuerza en la articulación A; b) la fuerza en el cable CB.



Datos. Tramos de 1.5, 1.5 y 3 [ft]; intensidades 300 y 400 [lb/ft].

Planteamiento. El diagrama se parte en un rectángulo y un triángulo en el primer tramo, un rectángulo en el segundo y un triángulo en el tercero. Cada fuerza vale el área y actúa en el centroide.

Resolución.

Parte	F_i [lb]	$\bar{x}_i$ [ft]	$F_i\bar{x}_i$ [lb · ft]
Rectángulo 300×1.5	450	0.75	337.5
Triángulo $\frac{1}{2}(100)(1.5)$	75	1.0	75.0
Rectángulo 400×1.5	600	2.25	1350.0
Triángulo $\frac{1}{2}(400)(3)$	600	4.0	2400.0
$\sum$	1725		4162.5

El triángulo del primer tramo tiene su lado mayor en $x = 1.5$, así que su centroide está en $1.5 - \frac{1.5}{3} = 1.0$; el del último tramo, en $3 + \frac{3}{3} = 4.0$.

$$\bar{x} = \frac{4162.5}{1725} = 2.41\,[\text{ft}].$$

Resultado. a) $R = 1725$ [lb], hacia arriba; b) su línea de acción pasa a 2.41 [ft] del extremo izquierdo.

4.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución; las resoluciones completas están en el Apéndice E.

Ejercicio propuesto 4.6.1 · placa con agujero circular

Adaptado de: 1er final 2014-1 (vespertino), problema 3

La placa de la figura ocupa el cuadrado $-6 \le x \le 6$, $-6 \le y \le 6$ (en cm), salvo que en el primer cuadrante su borde es un cuarto de circunferencia de radio 6 con centro en el origen y que en el tercer cuadrante solo existe el triángulo de vértices $(-6, 0)$, $(0, 0)$ y $(0, -6)$. Tiene un agujero circular de radio 3 con centro en el origen. Determine las coordenadas de su centroide.

5. Comprueba con una ecuación de momentos respecto a otro punto.
6. Da la magnitud $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ y la dirección si piden «la reacción».

Viga con una condición extra

1. Plantea las tres ecuaciones con la incógnita adicional (M, d, una carga).
2. Escribe la condición del enunciado como ecuación: $R_A = \frac{1}{2}B_y$, $R_B = 9R_A$, etc.
3. Usa primero $\sum F_y = 0$ junto con la condición (dos ecuaciones, dos reacciones verticales) y después la ecuación de momentos para la incógnita adicional.

Barras articuladas y armaduras

1. Busca las barras de dos fuerzas: su fuerza va a lo largo de la barra.
2. Si la estructura completa tiene más de tres incógnitas, sepárala: DCL de la barra que tiene la carga, con la fuerza de la barra de dos fuerzas como una sola incógnita.
3. Una armadura sin peso, apoyada en una articulación y un apoyo libre, se trata como **un solo cuerpo rígido** para las reacciones: no hace falta calcular las fuerzas en sus barras.

Reacciones en el espacio

1. Escribe las coordenadas de todos los puntos.
2. Para cada cable PQ (del cuerpo al anclaje): $\vec{T}_{PQ} = T_{PQ}\,\hat{e}_{PQ}$ con $\hat{e}_{PQ} = \overrightarrow{PQ}/|\overrightarrow{PQ}|$.
3. Toma momentos respecto a la **rótula** O: sus tres componentes desaparecen y quedan solo las tensiones. $\sum \vec{M}_O = \sum \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$.
4. Iguala a cero cada componente $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ y resuelve las tensiones. Si una componente queda $0 = 0$ (giro alrededor del eje de una barra), es normal: esa ecuación no da información.
5. Con $\sum \vec{F} = \vec{0}$ obtén O_x, O_y, O_z.
6. Fuerzas paralelas (cables verticales): solo quedan $\sum F_z = 0$, $\sum M_x = 0$ y $\sum M_y = 0$.

Clasificar la sujeción

1. Cuenta las incógnitas n de los apoyos y compáralas con e (3 o 6).
2. Si $n = e$, revisa que las reacciones no sean todas paralelas ni concurrentes: si no lo son, es isostático.
3. Si $n < e$, resuelve con las ecuaciones que tengas y comprueba la que sobra: si se cumple, hay equilibrio solo para esa carga; si no, no hay equilibrio.
4. Si $n > e$, escribe «hiperestático de grado $n - e$».

5.4 Ejemplo resuelto

> **Ejemplo resuelto · palanca con cable de control**
>
> *Basado en: 1er final 2016-2 (vespertino), problema 3.*
> La palanca AB, de peso despreciable, está articulada en C y se sujeta con el cable AD. Forma 20° con la horizontal; $AC = 10$ [in], $CB = 15$ [in], y el anclaje D está 12 [in] debajo de C, en la misma vertical. En B actúa una fuerza vertical de 75 [lb] hacia abajo. Determine: a) la tensión en el cable; b) la reacción en C.

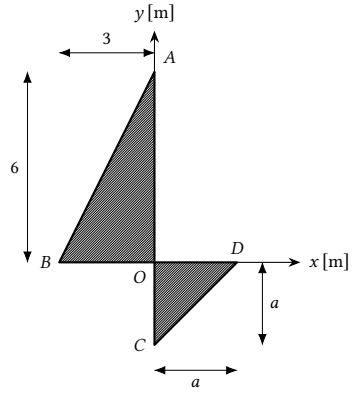
Resultado: $a = 2\,[\text{ft}]$; $\bar{y} = 5.23\,[\text{ft}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 110.

Ejercicio propuesto 4.6.3 · intervalo de un parámetro

Adaptado de: 2º final 2013-2, problema 3

La figura plana está formada por dos triángulos rectángulos: OAB, con $O(0,0)$, $A(0,6)$ y $B(-3,0)$ (en metros), y OCD, con $C(0,-a)$ y $D(a,0)$. Determine el intervalo de valores de a para que el centroide de la figura quede dentro del triángulo superior OAB.



Resultado: $0 < a < \sqrt[3]{54} = 3.78\,[\text{m}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 110.

Ejercicio propuesto 4.6.4 · lámina doblada con recorte semicircular

Adaptado de: 1er final 2013-2 (vespertino), problema 3

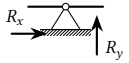
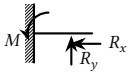
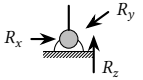
Una hoja de acero de $0.2\,[\text{in}]$ de espesor y $540\,[\text{lb/ft}^3]$ se dobló para formar la pieza de la figura (cotas en pulgadas): una pared triangular OAB en el plano yz, con $A(0,12,0)$ y $B(0,0,15)$; una pared rectangular $ODEA$ en el plano xy, de 16 (en x) por 12 (en y); y una pared rectangular $OBCD$ en el plano xz, de 16×15, a la que se le recortó un semicírculo de radio 6 con centro en $(8,0,0)$ sobre el borde OD. Determine las coordenadas del centro de gravedad.

2. las cargas conocidas (pesos en el centro de gravedad, fuerzas, pares, cargas distribuidas ya reducidas);
3. una reacción por cada apoyo, según la tabla de la sección 5.1.3, con un sentido supuesto;
4. las cotas necesarias para los momentos.

Si una incógnita sale negativa, el sentido real es el contrario al supuesto; no hace falta redibujar.

Apoyos y sus reacciones

Cada apoyo impide ciertos movimientos y, por eso, ejerce una fuerza (o un par) en esa dirección.

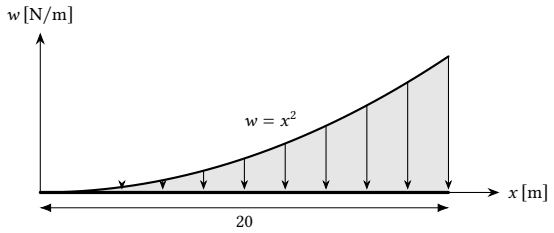
Apoyo	Dibujo	Reacción	Incógnitas
Apoyo libre: rodillo, patín, collarín liso o superficie lisa		Una fuerza perpendicular a la superficie de apoyo	1
Cable o cuerda		Una tensión a lo largo del cable, que jala al cuerpo	1
Barra de dos fuerzas (eslabón articulado en sus dos extremos y sin cargas intermedias)		Una fuerza a lo largo de la línea que une las dos articulaciones	1
Articulación (pasador)		Dos componentes, R_x y R_y	2
Empotramiento en el plano		R_x, R_y y un par M	3
Rótula (articulación esférica)		R_x, R_y, R_z; no ejerce par	3
Empotramiento en el espacio	—	R_x, R_y, R_z y M_x, M_y, M_z	6
Chumacera o bisagra	—	Dos fuerzas perpendiculares al eje (y dos pares si es la única)	2 o 4

Cuerpos de dos y de tres fuerzas

- **Dos fuerzas.** Si sobre un cuerpo actúan solo dos fuerzas (por ejemplo, una barra sin peso articulada en sus extremos), en equilibrio son iguales, opuestas y **colineales**: van a lo largo de la recta que une sus puntos de aplicación. Se usa para reducir incógnitas: una articulación unida a una barra de dos fuerzas da una sola incógnita, no dos.
- **Tres fuerzas.** Si actúan solo tres fuerzas no paralelas, sus líneas de acción son **concurrentes** (pasan por un mismo punto).

Isostático, hiperestático o mal sujeto

Sea n el número de incógnitas de reacción y e el número de ecuaciones independientes (3 en el plano, 6 en el espacio).



Resultado: $F = 2666.7\,[\mathrm{N}]$ hacia abajo, en $x = 15\,[\mathrm{m}]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 111.

4.7 Errores frecuentes

1. **Huecos con área positiva.** Un recorte resta: su A_i va con signo negativo y su $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ se escriben con el signo de su posición.
2. **Cambiar el origen.** El resultado se pide respecto al sistema de la figura. Si para la tabla conviene otro origen, hay que trasladar el resultado al final (véase el ejemplo de la sección 4.4).
3. **Copiar mal una columna.** Es fácil poner $A_i\bar{y}_i$ en la columna de $A_i\bar{x}_i$. Revisa cada producto antes de sumar.
4. $4r/3\pi$ **medido desde el lugar equivocado.** Se mide desde el **centro** (el diámetro), hacia el lado curvo. En un semicírculo recortado desde arriba, el centroide queda debajo del diámetro.
5. **Triángulo al revés.** El centroide está a $1/3$ del lado del ángulo recto (o de la base), no a $1/3$ del vértice agudo. Si hay duda, se promedian los tres vértices.
6. **Mezclar unidades** en láminas en el sistema inglés: $\mathrm{lb/ft^3}$ se divide entre 1728 para pasar a $\mathrm{lb/in^3}$.
7. **Olvidar la tercera coordenada** en piezas dobladas: la coordenada perpendicular al plano de cada parte es cero (o la del plano), no se omite.
8. **Carga triangular a $L/2$.** La fuerza de una carga triangular actúa a $L/3$ del lado mayor; la de una uniforme, a $L/2$.
9. **Raíces sin sentido físico.** En problemas con parámetro, una longitud negativa o mayor que la figura se descarta.

4.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $Q_y = \bar{x}A = \sum A_i\bar{x}_i$, $Q_x = \bar{y}A = \sum A_i\bar{y}_i$.
- $\bar{x} = \dfrac{\sum A_i\bar{x}_i}{\sum A_i}$ (huecos con $A_i < 0$); masas: $\bar{x} = \dfrac{\sum m_i\bar{x}_i}{\sum m_i}$, $m_i = \rho_i V_i$; láminas: $W_i = \gamma t A_i$.
- Rectángulo $(b/2,\ h/2)$; triángulo rectángulo $(b/3,\ h/3)$, área $bh/2$; triángulo cualquiera: promedio de vértices.
- Semicírculo: $\pi r^2/2$, $\bar{y} = 4r/3\pi$; cuarto de círculo: $\pi r^2/4$, $(4r/3\pi,\ 4r/3\pi)$; $4/3\pi = 0.4244$.
- Enjuta parabólica: $bh/3$, $(3b/4,\ 3h/10)$; semisegmento parabólico: $2bh/3$, $(3b/8,\ 3h/5)$.
- Carga distribuida: F es el área del diagrama de carga y actúa en su centroide. Uniforme: w_0L a $L/2$; triangular: $\frac{1}{2}w_0L$ a $L/3$ del lado mayor.

- $1\,[\mathrm{ft}] = 12\,[\mathrm{in}]$; $1\,[\mathrm{ft^3}] = 1728\,[\mathrm{in^3}]$.

4.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Redibuja la figura con los ejes y numera las partes (1, 2, 3, …).
2. Escribe la tabla completa con unidades en el encabezado; los huecos con signo negativo.
3. Suma columnas, divide y recuadra $\bar{x}$, $\bar{y}$ (y $\bar{z}$ si es 3D).
4. Marca el punto en el dibujo: si queda fuera del «grueso» de la figura, revisa signos.
5. En cargas distribuidas, dibuja cada fuerza equivalente sobre el diagrama de cuerpo libre, con su valor y su distancia, antes de escribir las ecuaciones de equilibrio.

Si no se encuentra el valor del parámetro, deja planteada la ecuación $\bar{x}(a) =$ valor dado con la tabla completa: el planteamiento correcto también cuenta.